ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

CONCOURS D'ENTRÉE
1978

OPTION : PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N. B. : Les candidats pourront utiliser des résultats qu'ils n'auront pas pu démontrer à la condition de l'indiquer clairement.

I

α, β, γ étant des réels appartenant tous trois à l'intervalle $]0 , \pi[$, on considère le déterminant

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

1) Factoriser ce déterminant, au besoin en l'abaissant d'abord au 2e ordre, et montrer qu'il est égal à

$$4 \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

2) Quelles relations simples lient α, β, γ lorsque $D(\alpha, \beta, \gamma) = 0$?

II

Dans le plan vectoriel euclidien non orienté, on donne trois droites vectorielles <u>distinctes</u> d_1, d_2, d_3 .

1) On se propose de déterminer chaque droite d_i par un vecteur unitaire $\vec{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) .

a) Combien y a-t-il de choix possibles pour le triplet $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$?

b) Montrer qu'on peut choisir les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ de façon qu'il existe une permutation (i, j, k) des trois nombres (1, 2, 3) telle que les vecteurs $\vec{u}_i$, $\vec{u}_j$, $\vec{u}_k$ vérifient la relation

$$\vec{u}_i + \lambda \vec{u}_j + \mu \vec{u}_k = \vec{0} \quad \text{avec} \quad 0 < \mu \leqslant \lambda \leqslant 1$$

c) Y a-t-il unicité du couple (λ, μ) ? du triplet $(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{u}_k)$?

2) On suppose désormais, dans cette partie II, que les droites d_1, d_2, d_3 sont déterminées respectivement par des vecteurs unitaires $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ vérifiant la relation

(1) $\vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_3 = \vec{0}$ avec $0 < \mu \leqslant \lambda \leqslant 1$

On désigne par (a, b, c) les mesures en radians des angles de ces vecteurs :

$$a = (\vec{u}_2, \vec{u}_3) \qquad b = (\vec{u}_3, \vec{u}_1) \qquad c = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

(On rappelle que dans le plan euclidien non orienté les mesures des angles sont des nombres appartenant à $[0 , \pi]$).

A quelle condition nécessaire et suffisante liant λ et μ , l'une des droites d_1, d_2, d_3 est-elle bissectrice de l'un des angles formés par les deux autres ? Les trois droites peuvent-elles avoir simultanément cette propriété ?

3) a) Calculer $(\lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{u}_3)^2$ et en déduire cos a. Calculer de même cos b et cos c en fonction de λ et μ.

b) En remarquant que $a \neq 0$, montrer que $\lambda + \mu > 1$

c) Démontrer les inégalités : $a \leqslant \frac{2\pi}{3} \leqslant c$. Peut-il y avoir égalité ?

d) Etablir de même les inégalités $a \leqslant b \leqslant c$ et $\pi - a \leqslant b$

4) a) Déduire de la relation (1) que λ et μ vérifient un système linéaire de 3 équations. En déduire la valeur du déterminant D(a, b, c) et montrer que $a + b + c = 2\pi$.

b) Résoudre le système par rapport à λ et μ. En déduire que

$$\vec{u}_1 \sin a + \vec{u}_2 \sin b + \vec{u}_3 \sin c = \vec{0}$$

5) <u>Application</u> :

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, on donne les trois droites $x = 0$, $y = 0$ et $x - y\sqrt{3} = 0$. Indiquer graphiquement comment choisir sur ces droites les vecteurs unitaires $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ de façon à ce qu'ils vérifient la relation (1). Quelles sont les valeurs de λ et μ correspondantes ?

.../...

III

Dans le plan affine euclidien non orienté, on donne trois droites affines D_1, D_2, et D_3 qui se coupent deux à deux en 3 points A, B, C non alignés tels que

$$A = D_2 \cap D_3 \quad , \quad B = D_3 \cap D_1 \quad , \quad C = D_1 \cap D_2$$

On donne pour chaque droite D_i un vecteur unitaire $\vec{n}_i$ qui lui est orthogonal.
On suppose ces vecteurs et le numérotage des droites tels que

$$(1) \quad \vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2 + \mu \vec{n}_3 = \vec{0} \quad \text{avec} \quad 0 < \mu \leqslant \lambda \leqslant 1$$

On appelle a, b, c les mesures en radians des angles de ces vecteurs :

$$a = (\vec{n}_2, \vec{n}_3) \qquad b = (\vec{n}_3, \vec{n}_1) \qquad c = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

Soit P un point du plan. On désigne par H_i sa projection orthogonale sur la droite D_i et on pose

$$\overrightarrow{PH_i} = \ell_i \vec{n}_i \qquad \text{avec} \qquad \ell_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3)$$

1) On pose $\overrightarrow{PA} = x \vec{n}_2 + y \vec{n}_3$. Calculer x et y en fonction de ℓ_2, ℓ_3 et de l'angle a.

2) En utilisant les résultats de la question (II, 4), calculer le vecteur $\vec{V}(P) = \ell_1 \sin a \overrightarrow{PA} + \ell_2 \sin b \overrightarrow{PB} + \ell_3 \sin c \overrightarrow{PC}$

3) Dans cette question et les suivantes, on utilisera sans les démontrer, les deux propositions suivantes :

*Etant donné 3 points A, B, C non alignés dans un plan affine, pour tout point M de ce plan, il existe un triplet de réels (α, β, γ) - et un seul, à un facteur près - tel que

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Les nombres (α, β, γ) sont appelés *coordonnées barycentriques* de M par rapport à (A, B, C).

**Le point M *appartient au triangle ABC* - c'est-à-dire est intérieur à ce triangle ou situé sur ses côtés - si et seulement si ses coordonnées barycentriques par rapport à (A, B, C) sont toutes trois positives ou nulles, ou toutes trois négatives ou nulles.

a) Déterminer des coordonnées barycentriques de P par rapport à (A, B, C)

b) Montrer que P appartient au triangle ABC si et seulement si ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, sont de même signe.

4) Montrer qu'il existe dans le plan 4 points équidistants des droites D_1, D_2, et D_3, dont un seul appartient au triangle ABC. Calculer leurs coordonnées barycentriques en fonction de sin a, sin b et sin c.

IV

Les données et les notations étant les mêmes que dans la partie III, on suppose désormais le point P tel que $\ell_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, 2, 3$. On considère le champ scalaire qui, à tout point M du plan, associe la somme f(M) de ses distances aux 3 droites D_1, D_2, D_3 :

$$M \longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^{3} \|\overrightarrow{MK_i}\|$$

en désignant par K_i la projection orthogonale de M sur la droite D_i.

1) a) On suppose $P \in D_i$
Montrer que pour tout point M du plan $\|\overrightarrow{MK_i}\| = |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_i|$.

b) On suppose $P \notin D_i$
Montrer que pour tout point M du plan $\|\overrightarrow{PH_i}\| - \|\overrightarrow{MK_i}\| - \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_i \leqslant 0$.

De façon plus précise établir que, suivant que M se trouve dans l'une ou l'autre de deux régions du plan, il y a égalité ou inégalité stricte.

2) On suppose que P n'appartient à aucune des droites D_i .
Montrer que, quel que soit M ,

$$(2) \quad f(P) - f(M) \leqslant \overrightarrow{PM} \cdot (\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3)$$

En déduire que si $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = \vec{0}$ f(M) est minimum en P.

3) On suppose que P appartient à la droite D_3 et à elle seulement.
Montrer que :

$$(3) \quad f(P) - f(M) \leqslant \overrightarrow{PM} \cdot (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) - |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_3| .$$

En déduire que si $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \mu \vec{n}_3 = \vec{0}$ avec $0 < \mu \leqslant 1$, f(M) est minimum en P.

4) On suppose que $P = A = D_2 \cap D_3$. Montrer que

$$(4) \quad f(P) - f(M) \leqslant \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_1 - |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_2| - |\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_3| .$$

En déduire que si $\vec{n}_1 + \lambda \vec{n}_2 + \mu \vec{n}_3 = \vec{0}$ avec $0 < \mu \leqslant \lambda \leqslant 1$, f(M) est minimum en P.

5) Reprendre les inégalités (2), (3) et (4) précédentes et montrer plus précisément que, pour chacune d'elles, il existe une partie R du plan que l'on précisera telle que si $M \in R$, il y a égalité et si $M \notin R$, il y a inégalité stricte.

6) Application :

On donne un triangle ABC dans le plan affine euclidien. Déterminer les points du plan pour lesquels la somme des distances aux droites AB, BC et CA est minimale. On pourra examiner successivement les cas suivants :

a) le triangle ABC est équilatéral ;

b) le triangle ABC est isocèle, tel que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ et l'angle en C est inférieur à $\frac{\pi}{3}$;

c) tous les autres cas.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail